



TITLE:

## Remarks on theta series

AUTHOR(S):

瀬山, 敦; 清水, 敦

---

CITATION:

瀬山, 敦 ...[et al]. Remarks on theta series. 代数幾何学シンポジウム記録 1979, 1979: 212-216

ISSUE DATE:

1979-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/212571>

RIGHT:

## Remarks on theta series

瀬山 敦

清水 敦

$z$  を degree  $n$  の Siegel 上半空間  $H_n$  の元とし、 $x$  は  $\mathbb{C}^n$  の元、 $k', k''$  はともに  $\mathbb{R}^n$  の元とする時、 $\begin{pmatrix} k' \\ k'' \end{pmatrix}$  を theta characteristic とする theta series  $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} k' \\ k'' \end{smallmatrix}\right](z|x)$  は次の様に定義される。

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix} k' \\ k'' \end{smallmatrix}\right] = \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} e\left(\frac{1}{2}t(n+k')z(n+k') + t(n+k')(x+k'')\right)$$

ただし、 $e(z)$  は  $\exp(2\pi\sqrt{-1}z)$  をあらわす ( $z \in \mathbb{C}$ )。このとき、次が成り立つ。

Proposition.  $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} k' \\ k'' \end{smallmatrix}\right](z|0)$  が、 $z$  の関数として恒等的に 0 ならば、 $2k' \equiv 2k'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}^n}$  かつ  $2^t k' k'' \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$

この事実<sup>\*</sup>は、 $k', k'' \in \mathbb{Q}^n$  のときは既に知られている。  $k', k'' \in \mathbb{R}^n$  のときの証明は 最初瀬山が transformation formula を使って行ったが、あとで清水が初等的な方法で証明したので、こ

ここではそれを紹介する。

$$R' = \begin{pmatrix} R'_1 \\ \vdots \\ R'_n \end{pmatrix} \quad R'' = \begin{pmatrix} R''_1 \\ \vdots \\ R''_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad \text{に 対 し、} \quad R_m^{*'} = \begin{pmatrix} R'_{m+1} \\ \vdots \\ R'_n \end{pmatrix}$$

$$R_m^{*''} = \begin{pmatrix} R''_{m+1} \\ \vdots \\ R''_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad x_m^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m, \quad R_m^{m'} = \begin{pmatrix} R'_{m+1} \\ \vdots \\ R'_n \end{pmatrix} \quad R_m^{m''} = \begin{pmatrix} R''_{m+1} \\ \vdots \\ R''_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m}$$

$$x_m^* = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-m} \quad \text{と お く。} \quad (1 \leq m < n)$$

Lemma 1 任意の  $z_m^* \in H_m$ ,  $z_{*}^* \in H_{n-m}$  に 対 し、

$$\mathcal{J} \begin{bmatrix} R' \\ R'' \end{bmatrix} \left( \begin{pmatrix} z_m^* & 0 \\ 0 & z_{*}^* \end{pmatrix} \middle| x \right) = \mathcal{J} \begin{bmatrix} R_m^{*'} \\ R_m^{*''} \end{bmatrix} (z_m^* | x_m^*) \mathcal{J} \begin{bmatrix} R_{*}^{m'} \\ R_{*}^{m''} \end{bmatrix} (z_{*}^* | x_{*}^*)$$

( $1 \leq m < n$ ).

Lemma 2. 任意の  $u \in GL(n, \mathbb{Z})$  に 対 し

$$\mathcal{J} \begin{bmatrix} R' \\ R'' \end{bmatrix} (z | x) = \mathcal{J} \begin{bmatrix} u^{-1} R' \\ {}^t u R'' \end{bmatrix} ({}^t u z u | {}^t u x).$$

従って特に、 $\mathcal{J} \begin{bmatrix} R' \\ R'' \end{bmatrix} (z | 0)$  が恒等的に 0 なら、

$\mathcal{J} \begin{bmatrix} u^{-1} R' \\ {}^t u R'' \end{bmatrix} (z | 0)$  も恒等的に 0 である。

この 2 つの lemma は定義から簡単にでる。さ

て Proposition の証明はこの 2 つの lemma を使って帰納法で行なう。

$n=1$  のとき、 $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} k' \\ k'' \end{smallmatrix}\right](z|0) = \mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](z|zk'+k'')e(\frac{1}{2}k'zk'+k''k'')$  であるが、 $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](z|x)$  の  $x$  の函数としての零点は  $\{az+b \mid a \equiv \frac{1}{2}, b \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}\}$  しかないから、上の左辺が任意の  $z$  に対して 0 になるためには、 $k' \equiv k'' \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$  でなくてはならない。よって  $n=1$  の時は正しい。

$n=2$  のとき、lemma 1 から、任意の  $z_1, z_2 \in H_1$  に對し、

$$\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} k' \\ k'' \end{smallmatrix}\right]\left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \middle| 0\right) = \mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} k'_1 \\ k''_1 \end{smallmatrix}\right](z_1|0) \mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} k'_2 \\ k''_2 \end{smallmatrix}\right](z_2|0)$$

であるから、 $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} k' \\ k'' \end{smallmatrix}\right](z|0)$  が恒等的に 0 であれば、 $k'_1 \equiv k''_1 \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$  または、 $k'_2 \equiv k''_2 \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$  が必要だったが、 $n=1$  の時の証明からわかる。 $k'_1 \equiv k''_1 \equiv \frac{1}{2}$  としてよい。

一方  $u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  とおけば、lemma 2 から、

$\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} u_1 k' \\ u_2 k'' \end{smallmatrix}\right](z|0)$  が恒等的に 0 である。従って上と同様にして、 $k'_1 - k'_2 \equiv 2k''_1 + k''_2 \equiv \frac{1}{2}$  または、 $-k'_1 + 2k'_2 \equiv k''_1 + k''_2 \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$  が必要だった。従って上とあ

わけて  $k_2' \equiv 0, k_2'' \equiv \frac{1}{2}$  又は  $2k_2' \equiv 0, k_2'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$

いずれにしても、結果はなりたつ。

$n > 2$  の時、帰納法で証明を完結する。

$\mathcal{J} \left[ \begin{smallmatrix} k_1' \\ k_1'' \end{smallmatrix} \right] (z|0)$  が恒等的に 0 であるとせよ。

I) ある  $i (1 \leq i \leq n)$  に対して、 $2k_i' \not\equiv 0$  又は  $2k_i'' \not\equiv 0$  又は  $2k_i' k_i'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$  となる場合。  $i$  は 1 とし  
てよい。 lemma 1 から 任意の  $z_1^* \in H_1, z_{n-1}^* \in H_{n-1}$  に  
対し

$$\mathcal{J} \left[ \begin{smallmatrix} k_1^* \\ k_1^{*'} \end{smallmatrix} \right] (z_1^*|0) \mathcal{J} \left[ \begin{smallmatrix} k_{n-1}' \\ k_{n-1}'' \end{smallmatrix} \right] (z_{n-1}^*|0) = 0$$

ところが、 $\mathcal{J} \left[ \begin{smallmatrix} k_1^* \\ k_1^{*'} \end{smallmatrix} \right] (z_1^*|0) = \mathcal{J} \left[ \begin{smallmatrix} k_1' \\ k_1'' \end{smallmatrix} \right] (z_1^*|0)$  は恒等的には  
0 でないから、 $\mathcal{J} \left[ \begin{smallmatrix} k_{n-1}' \\ k_{n-1}'' \end{smallmatrix} \right] (z_{n-1}^*|0)$  が恒等的に 0 でなく  
てはならない。よって帰納法の仮定から、

$2k_{n-1}' \equiv 2k_{n-1}'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}^{n-1}} \quad 2k_{n-1}' k_{n-1}'' \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ 。すると  
 $k_j' \equiv k_j'' \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$  なる  $j (2 \leq j \leq n)$  がある。(さ  
もないと  $2k_{n-1}' k_{n-1}'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$  となってしまう。)  $j$   
は 2 としてよい。再び lemma 1 から、

$$\mathcal{J} \left[ \begin{smallmatrix} k_2^* \\ k_2^{*'} \end{smallmatrix} \right] (z_2^*|0) \mathcal{J} \left[ \begin{smallmatrix} k_n^* \\ k_n^{*'} \end{smallmatrix} \right] (z_n^*|0) = 0$$

が任意の  $z_2^* \in H_2$ ,  $z_2^* \in H_{n-2}$  に対してなりたつ。と  
 こらから、 $2^t R_2^{*'} R_2^{*''} \equiv 2^t R_2^{*'} R_2^{*''} - \frac{1}{2} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$  であるから  
 $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} R_2^{*'} \\ R_2^{*''} \end{smallmatrix}\right](z_2^*|0)$  は恒等的には 0 でない。従って、  
 $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} R_2^{*'} \\ R_2^{*''} \end{smallmatrix}\right](z_2^*|0)$  は恒等的に 0 ゆえ、 $2R_2^{*'} \equiv 2R_2^{*''} \equiv 0$  かつ  
 $2R_2^{*'} R_2^{*''} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ 。従って、 $2R_2^{*'} \equiv 2R_2^{*''} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}^n}$  かつ  
 $2^t R_2^{*'} R_2^{*''} = 2R_2^{*'} R_2^{*''} + 2^t R_2^{*'} R_2^{*''} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ 。よってこの場  
 合は正しい。

II) I でないとき、すなわち任意の  $i$  に対し

$R_i^{*'} \equiv R_i^{*''} \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$  のとき。このとき  $n$  は奇数  
 でなくてはならない。 $n$  が偶数とすると、

$$\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} R_2^{*'} \\ R_2^{*''} \end{smallmatrix}\right](z_2^*|0) \mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} R_2^{*'} \\ R_2^{*''} \end{smallmatrix}\right](z_2^*|0) = 0 \quad \text{for any } z_2^* \in H_2, z_2^* \in H_{n-2}$$

であるが、帰納法の仮定から  $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} R_2^{*'} \\ R_2^{*''} \end{smallmatrix}\right](z_2^*|0)$  も  $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} R_2^{*'} \\ R_2^{*''} \end{smallmatrix}\right](z_2^*|0)$  も恒等的には 0 でない。これは矛盾であ  
 る。従って  $n$  は奇数であり、このとき 明らか  
 かに、 $2R_2^{*'} \equiv 2R_2^{*''} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}^n}$  かつ  $2^t R_2^{*'} R_2^{*''} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$

(証明終)

\*) See Igusa, J: Theta function Die Grundlehren der Math.

Wiss. Bd 194. Springer-Verlag, Berlin (1972) p.174 Theorem I